Innledning til 3.3

I forbindelse med Definisjon 3.3.3 kan det være nyttig å innføre følgende notasjon for å unngå unødvendig lange og tunge formuleringer:

Hvis A og B hører til samme halvplan som begrenses av linjen l, skriver vi:

$$A \sim B \,(\text{rel } l)$$

Dersom A og B hører til motsatte halvplan skriver vi:

$$A \nsim B \,(\text{rel } l)$$

Altså har vi i det første tilfellet:

$$A \sim B \,(\text{rel } l) \Leftrightarrow \overline{AB} \cap l = \emptyset,$$

og i det andre tilfellet:

$$A \nsim B \,(\text{rel } l) \Leftrightarrow \overline{AB} \cap l \neq \emptyset.$$

<u>NB!</u>

Dette er en <u>"privat" notasjon</u> som ikke finnes hos Venema! På de følgende sider vil denne skrivemåten være angitt i margen. Fra og med s. 54 vil <u>denne</u> notasjon bli benyttet i teksten.

3.3 PLANSEPARASJON

Vi skal i dette avsnittet innføre halvplan. Vi trenger da først og fremst følgende:

DEFINISJON:

En delmengde S av P sies å være konveks dersom det for hvert par av punkter A og B i S er slik at også $\overline{AB}$ er inneholdt i S.

Vi kan konkretisere dette ved følgende eksempler fra $\mathbb{R}^2$:

AKSIOM 3.3.2 (Planseparasjons-postulatet)

For hver linje ℓ i $\mathbb{P}$ vil

$$\mathbb{P} \setminus \ell = H_1 \cup H_2$$

der $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, $H_1 \neq \emptyset$, $H_2 \neq \emptyset$, H_1 og H_2 er begge konvekse delmengder av $\mathbb{P}$ og dessuten er s.a hvis $A \in H_1$ og $B \in H_2$, så vil

$$\overline{AB} \cap \ell \neq \emptyset.$$

Start 2/2 -2012

BETEGNELSER:

- De to mengdene H_1 og H_2 innført ovenfor kalles halvplan begrenset av ℓ.
- Hvis $A \in H_1$ settes også $H_1 = H_A$.

DEFINISJON 3.3.3

La ℓ være en linje og la A og B være to ytre punkt for linjen. Vi sier at A og B ligger <u>på samme side</u> av ℓ hvis begge ligger i H_1 eller begge ligger i H_2. De <u>ligger på motsatte</u> sider av ℓ dersom dette ikke er tilfellet.

$A \sim B$ (rel ℓ)

$A \nsim B$ (rel ℓ)

PROPOSISJON 3.3.4:

$A \sim B (\text{rel } \ell) \Leftrightarrow \overline{AB} \cap \ell = \phi$

La ℓ være en linje s. a. A og B er distinkte punkt som ikke ligger på ℓ. Punktene ligger på samme side av ℓ hvis og bare hvis $\overline{AB} \cap \ell = \phi$. Punktene A og B ligger på motsatte sider av ℓ hvis og bare hvis $\overline{AB} \cap \ell \neq \phi$.

Nevnt $\mathbb{R}^3$ og linje i $\mathbb{R}^3$

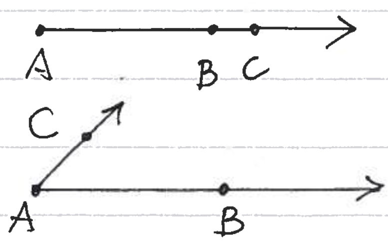
(Bevis et er opplagt!)

DEFINISJON 3.3.5:

Starter for alvor her! 7/2-2011

To stråler $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ med samme endepunkt kalles <u>motsatte stråler</u> dersom $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{AC}$ og $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$. I motsatt fall sies de å være <u>ikke-motsatte</u>.

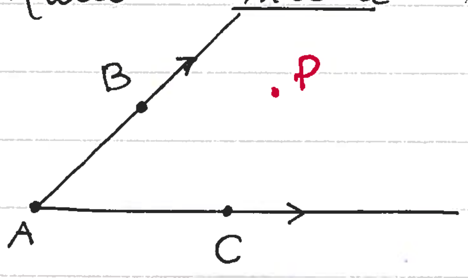
Motsatte stråler

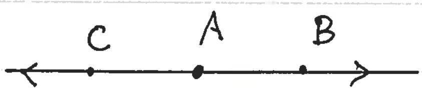


Ikke-motsatte stråler!

DEFINISJON 3.3.6

En <u>vinkel</u> er $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$ der $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ er ikke-motsatte stråler. (med felles startpunkt endepunkt !) Denne vinkel betegnes enten $\angle BAC$ eller $\angle CAB$. Punktet A kalles vinkelens <u>hjørne</u> (<u>topp-punkt</u>) og strålene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ kalles <u>sidene</u> til vinkelen.





Dette er ikke en vinkel !!

(Kanskje man i skolematematikken godtok to motsatte stråler som en vinkel ?)

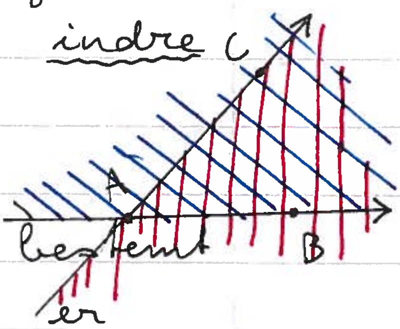
DEFINISJON 3.3.7

3/2-10 La A, B, C være tre punkter s.a. $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ ikke er motsatte stråler. Det <u>indre</u> av vinkelen $\angle BAC$ defineres som følger:

(i) Hvis $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{AC}$, er det <u>indre</u> av $\angle BAC$ lik snittet

$$H_B \cap H_C$$

der H_B er <u>halvplanet</u> bestemt av B og $\overleftrightarrow{AC}$ mens H_C er <u>halvplanet</u> bestemt av C og $\overleftrightarrow{AB}$.



$D \in in(\angle BAC)$
def $\Updownarrow$
$D \sim B$ (rel $\overleftrightarrow{AC}$)
$D \sim C$ (rel $\overleftrightarrow{AB}$)

(ii) Hvis $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, defineres det indre av $\angle BAC$ å være den tomme mengden, $\emptyset$.

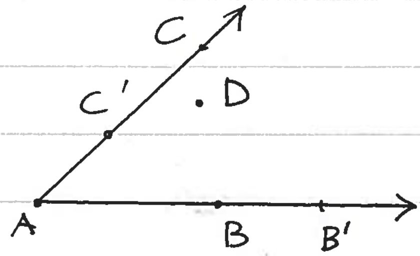
DEFINISJON 3.3.8

Strålen $\overrightarrow{AD}$ sies å ligge mellom strålene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ dersom D er et indre punkt i $\angle BAC$.

PROBLEM:

Det er to problemer som ikke er berört i de to siste definisjoner.

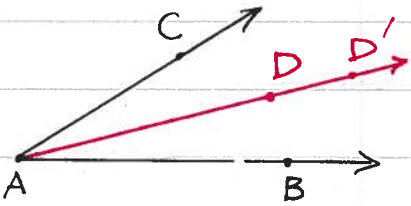
(a) I definisjonen av det indre av en vinkel kan det synes som om valget av punktene B og C på de to sidene (vinkelbenene!) kan ha avgjørende betydning for om D ligger i det indre av $\angle BAC$ eller ikke. Dette er selvsagt ikke bra!



Hva om B erstattes av $B' \in \overrightarrow{AB}$ og C erstattes av $C' \in \overrightarrow{AC}$. Vil da D fortsatt være i det indre av

$$\angle B'AC' = \angle BAC \,?$$

(b) Hvis $\overrightarrow{AD}$ er en stråle som ligger mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ og $D' \in \overrightarrow{AD} \setminus \{A\}$, vil $\overrightarrow{AD'}$ være samme stråle.



Men er det klart $\overrightarrow{AD'}$ også en stråle som ligger mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$?

Begge spörsmål besvares v.h.a. fölgende teorem.

TEOREM 3.3.9 (Stråle-teoremet)

Hvis ℓ er en linje og $A \in \ell$ og $B \notin \ell$. Dersom $C \in \overrightarrow{AB}$, $C \neq A$, så vil B og C ligge på samme side av ℓ.

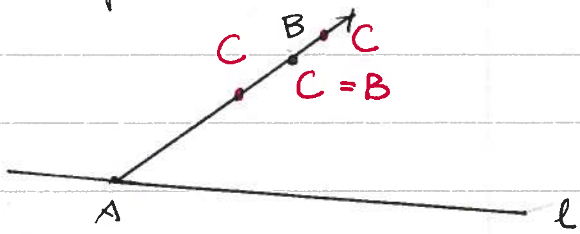
BEVIS:

Siden $C \neq A$, må vi ha følgende tre muligheter:

(i) $A * C * B$; (ii) $C = B$; (iii) $A * B * C$

(i): Har at $\overline{CB} \cap \ell = \phi$ siden $\overleftrightarrow{CB}$ bare har A felles med ℓ. (Teorem 3.1.7)

Altså ligger B og C på samme side av ℓ.



(ii) Opplagt.

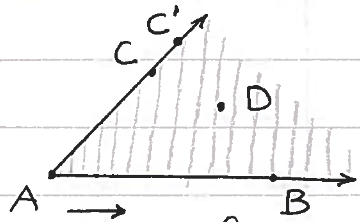
(iii) $A * B * C$. Her vil $A \notin \overline{BC}$ og ℓ og $\overleftrightarrow{BC}$ har bare punktet A felles med ℓ.

Altså ligger B og C på samme side av ℓ. $\square$

Vi vender nå tilbake til de to problemer vi møtte under Def. 3.3.8.

(a) I definisjonen av "det indre" kreves det at C og D ligger på samme side av $\overleftrightarrow{AB}$. Vi kan erstatte C med $C' \in \overrightarrow{AC} \setminus \{A\}$ og har $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC}$. Ligger da C' og D på samme side av $\overleftrightarrow{AB}$?

VET
$C \sim D$ (rel $\overleftrightarrow{AB}$)
T. 3.3.9
$C \sim C'$ (rel $\overleftrightarrow{AB}$)
$\Downarrow$
$D \sim C'$ (rel $\overleftrightarrow{AB}$)



Svaret er ja ut fra Teorem 3.3.9. siden C og D ligger på samme side av $\overleftrightarrow{AB}$.

Helt analogt får vi at B og D ligger på samme side av $\overleftrightarrow{AC}$

$$B \sim B' (\text{rel } \overleftrightarrow{AC}) \wedge B \sim D (\text{rel } \overleftrightarrow{AC})$$
$$\Downarrow$$
$$D \sim B' (\text{rel } \overleftrightarrow{AC})$$

Altså er $D \in \text{int}(\angle B'AC')$ når $D \in \text{int}(\angle BAC)$.

(b) Vil $\overrightarrow{AD'}$ være en stråle som ligger mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ når $\overrightarrow{AD}$ ligger mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$? Vi har her:

$$\left.\begin{array}{l} D \sim D' (\text{rel } \overleftrightarrow{AC}) \\ \text{og} \quad D \sim D' (\text{rel } \overleftrightarrow{AB}) \end{array}\right\} \text{T.3.3.9}$$

Vi har i følge antagelsen:

$$D \sim C (\text{rel } \overleftrightarrow{AB}) \quad \text{og} \quad D \sim B (\text{rel } \overleftrightarrow{AC})$$

Tilsammen gir dette:

$$D' \sim B (\text{rel } \overleftrightarrow{AC}) \quad \text{og} \quad D' \sim A (\text{rel } \overleftrightarrow{AB})$$

Altså ligger strålen $\overrightarrow{AD'}$ mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

MERKNAD:

For å forenkle formuleringene i forhold til boken har jeg innført følgende:

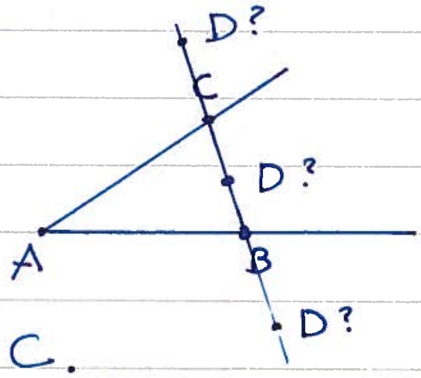
$A \sim B (\text{rel } \ell)$: A og B ligger på samme side av ℓ

$A \nsim B (\text{rel})$; A og B ligger på motsatte sider av ℓ.

(Dette er min egen idé, finnes ikke i Venema!)

TEOREM 3.3.10

La A, B, C være tre ikke-kolineære punkter. La D være et punkt på $\overleftrightarrow{BC}$. Da ligger D mellom B og C hvis og bare hvis strålen $\overrightarrow{AD}$ ligger mellom strålene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.



BEVIS:

Bare hvis: Vi antar først at D ligger mellom B og C, d.v.s. at $B * D * C$.

Som i tidligere bevis følger det da at $\overline{BD} \cap \overleftrightarrow{AC} = \emptyset$ og $\overline{CD} \cap \overleftrightarrow{AB} = \emptyset$. Altså B og D ligger på samme side av $\overleftrightarrow{AC}$ og C og D ligger på samme side av $\overleftrightarrow{AB}$. M.a.o. er D et indre punkt i $\angle BAC$. og ut fra vår definisjon må da strålen $\overrightarrow{AD}$ ligge mellom strålene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$

Hvis: Anta så at strålen $\overrightarrow{AD}$ ligger mellom strålen $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$. Da er D i det indre av $\angle BAC$ ut fra def. av stråle som ligger mellom to andre stråler med samme startpunkt (Def. 3.3.8) Da er D og B på samme side av $\overleftrightarrow{AC}$ og D og C er på samme side av $\overleftrightarrow{AB}$. (p. def. av indre punkt.) Dette gir at $\overline{DC}$ ikke kan ha punkt felles med $\overleftrightarrow{AB}$. og $\overline{DB}$ kan ikke ha punkt felles med $\overleftrightarrow{AC}$. Dette betyr at vi ikke kan ha $D * B * C$ og vi kan heller ikke ha $D * C * B$. Altså må vi ha $B * D * C$. □

<u>DEFINISJON 3.3.11</u>

La A, B, C være tre ikke-kolineære punkter. Ved <u>trekanten</u> (<u>triangelet</u>) $\triangle ABC$ forstår vi unionen av de tre segmentene $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$. M.a.o.

$$\triangle ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}.$$

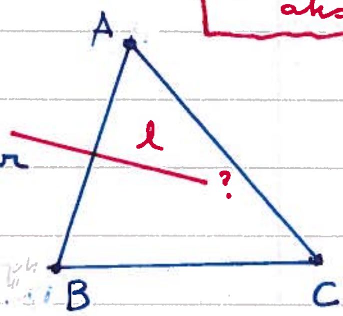
Punktene A, B, C kalles <u>hjørnene</u> til trekanten og segmentene $\overline{AB}$, $\overline{BC}, \overline{CA}$ kalles sidene.

(NB! "Trekant" er bare definert for ikke-kolineære punkt. Når vi senere omtaler $\triangle ABC$, er det underforstått at A, B, C ikke er kolineære.

M. Pasch 1848-1930 brukte dette som et av sine aksiomer

<u>TEOREM 3.3.12</u> (Pasch's aksiom)

La $\triangle ABC$ være en trekant og l en linje s.a. ikke noe av punktene ligger på l. Hvis l skjærer $\overline{AB}$, må l skjære enten $\overline{BC}$ eller $\overline{CA}$.



<u>BEVIS:</u>

La H_1 og H_2 være de to halvplan i forhold til. Da må $A \in H_1$ og $B \in H_2$ (UTAG.) Da må $C \in H_1$ eller $C \in H_2$. I det første tilfellet ligger C og B i motsatte halvplan. D.v.s. at $\ell \cap \overline{CB} \neq \emptyset$. I det andre tilfellet ligger A og C i motsatte halvplan, og $\ell \cap \overline{CA} \neq \emptyset$. □

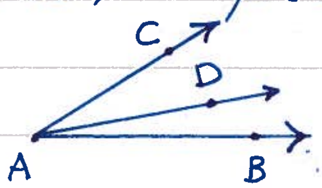
3.4 VINKEL-MÅL OG GRADSKIVE-POSTULATET.

AKSIOM 3.4.1 (GRADSKIVE-POSTULATET)

Til hver vinkel $\angle BAC$ tilordnes et tall $\in \mathbb{R}$ som betegnes $\mu(\angle BAC)$. Dette kalles vinkelmålet til $\angle BAC$ og oppfyller følgende betingelser:

1. $0° \leq \mu(\angle BAC) < 180°$ for hver vinkel $\angle BAC$.
2. $\mu(\angle BAC) = 0°$ hvis og bare hvis $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.
3. (Vinkel-konstruksjons-postulatet) For hvert tall $0 < r < 180°$ og for hvert halvplan H begrenset av $\overleftrightarrow{AB}$ eksisterer det en entydig bestemt stråle $\overrightarrow{AE}$ der $E \in H$ s.a. $\mu(BAE) = r$
4. (Vinkeladdisjons-postulatet) Hvis strålen $\overrightarrow{AD}$ ligger mellom strålene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ da har vi:

$$\mu(\angle BAD) + \mu(\angle DAC) = \mu(\angle BAC).$$



DEFINISJON 3.4.2

To vinkler $\angle BAC$ og $\angle EDF$ sies å være kongruente dersom $\mu(\angle BAC) = \mu(\angle EDF)$. Vi skriver da

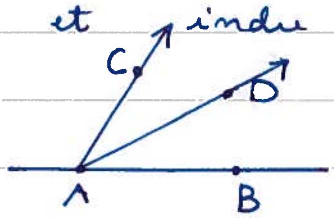
$$\angle BAC \cong \angle EDF.$$

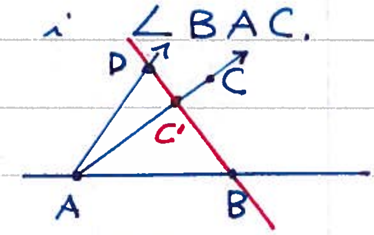
DEFINISJON 3.4.3

En vinkel $\angle BAC$ sies å være en <u>rett vinkel</u> dersom $\mu(\angle BAC) = 90°$. Vinkelen er <u>spiss</u> dersom $\mu(\angle BAC) < 90°$ og den er <u>stump</u> dersom $\mu(\angle BAC) > 90°$

LEMMA 3.4.4

La A, B, C, D være fire distinkte punkter s.a. at C og D ligger på samme side av $\overleftrightarrow{AB}$ og s.a. $D \notin \overleftrightarrow{AC}$. Da vil enten C være et indre punkt i $\angle BAD$ eller D er et indre punkt i $\angle BAC$.





Vi antar da at D ikke er i dit indre av $\angle BAC$. Vi skal bevise at da må C være i dit indre av $\angle BAD$. Vi har altså at D og C er på samme side av $\overleftrightarrow{AB}$ mens B og D ligger på motsatte sider av $\overleftrightarrow{AC}$. $\overline{BD} \cap \overleftrightarrow{AC} \neq \emptyset$. La C' være skjæringspunktet mellom $\overline{BD}$ og $\overleftrightarrow{AC}$. C' er da et indre punkt i $\angle BAD$. Spesielt er da D og C' på samme side av $\overleftrightarrow{AB}$. Siden C og C' ligger på samme side av $\overleftrightarrow{AB}$ som D kan ikke A ligge mellom C og C'. Altså er ikke $\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AC'}$ motsatte stråler.

Altså er $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC'}$. Altså er C i det indre av $\angle BAD$. □

<u>TEOREM 3.4.5</u> (Mellomliggenhets-teoremet for stråler.)
Hvis A, B, C, D er fire distinkte punkter som er s.a. C og D ligger på samme side av $\overleftrightarrow{AB}$. Da vil $\mu(\angle BAD) < \mu(\angle BAC)$ hvis og bare hvis $\overrightarrow{AD}$ ligger mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$

<u>BEVIS:</u>
Anta först at $\overrightarrow{AD}$ ligger mellom strålene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$. Da har vi fra Aksiom 3.4.1, del (4) at:

$$\mu(\angle BAD) + \mu(\angle DAC) = \mu(\angle BAC)$$

Siden $\mu(\angle DAC) > 0$, följer da at

$$\mu(\angle BAD) < \mu(\angle BAC)$$

Anta så at $\overrightarrow{AD}$ ikke ligger mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$. Hvis $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ må $\mu(\angle BAD) = \mu(\angle BAC)$.
Hvis $\overrightarrow{AC}$ ligger mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AD}$, får vi som foran at

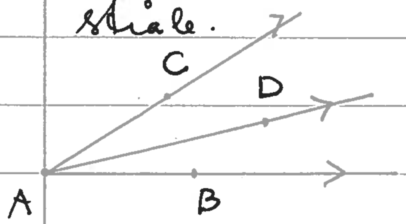
$$\mu(\angle BAC) < \mu(\angle BAD)$$

Begge deler i motstrid med

$$\mu(\angle BAD) < \mu(\angle BAC). \quad □$$

<u>DEFINISJON 3.4.6</u>
La A, B, C være tre ikke-kolineære punkter. Strålen $\overrightarrow{AD}$ er <u>vinkelhalveringsstrålen</u> for $\angle BAC$ hvis D ligger i det indre av $\angle BAC$ og $\mu(\angle BAD) = \mu(\angle DAC)$.

TEOREM 3.4.7 (Eksistens og entydighet av vinkelhalveringsstråle.



Hvis A, B, C er ikke-kolineære, så eksisterer det en og bare en vinkelhalveringsstråle til vinkelen $\angle BAC$.

BEVIS (Oppg. 1, s. 55)

3.5 GROSSBAR-TEOREMET OG LINÆRT-PAR-TEOREMET.

Før man går videre til resten av postulatene i plan geometri, vil vi bevise to fundamentale teoremer: Crossbar-teoremet og lineær-par-teoremet. Begge disse taes ofte som postulater (aksiomer). Lesere som er ivrige etter å komme videre kan også gjøre det. Det er logisk sett akseptabelt å inkludere disse utsagn som aksiomer og komme videre. Bevisene kan da utsettes. Da vil leserne antagelig være mer i stand til å sette pris på styrken og betydningen av disse resultatene.

Hovedpoenget med dette kapitlet er å studere alle grunnleggende fakta som Euklid tok for gitt i sine bevis. Målet i å gjøre disse antagelser eksplisitt er langt viktigere enn målet å forsøke å finne e. minimalt samling av nødvendige antagelser.

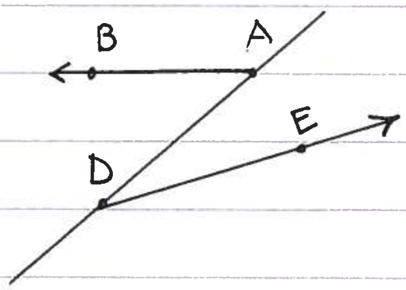
TEOREM 3.5.1 (Z-teoremet)

La ℓ være en linje og A og D distinkte punkter på ℓ. Hvis

$$B \not\sim E \ (\text{rel } \ell)$$

da vil

$$\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{DE} = \emptyset$$



BEVIS:

Alle $P \in \overrightarrow{AB} \setminus \{A\}$ vil i følge Teorem 3.3.9 være s.a.:

$$P \sim B \ (\text{rel } \ell).$$

Alle $Q \in \overrightarrow{DE} \setminus \{D\}$ vil av samme grunn være s.a.:

$$Q \sim E \ (\text{rel } \ell)$$

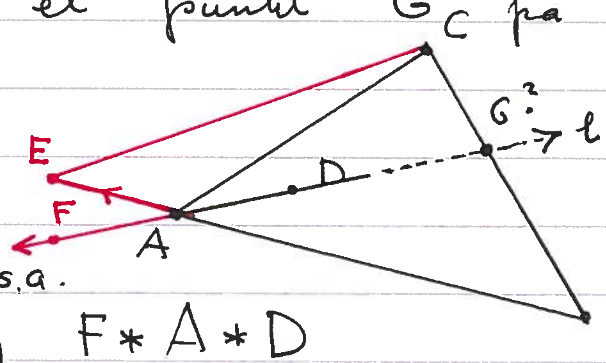
Altså må $P \not\sim Q \ (\text{rel } \ell)$; d.v.s.

$$\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{DE} = \emptyset$$

siden også $A \neq D$. □

TEOREM 3.5.2 (Crossbar-teoremet)

Hvis $\triangle ABC$ er en trekant og D et punkt i det indre av $\angle BAC$, så finnes det et punkt G på $\overrightarrow{AD} \cap \overline{BC}$.



BEVIS:

Vi velger da punktene E og F s.a.

$$E * A * B \quad \text{og} \quad F * A * D$$

og $\ell = \overleftrightarrow{AD}$. Siden D er et indre punkt i $\angle BAC$, vil hverken B eller C

ligge på l. Vi kan dermed anvende Pasch's teorem på $\triangle EBC$ og linjen l.
Da må $l \cap \overline{EC} \neq \emptyset$ eller $l \cap \overline{BC} \neq \emptyset$
(Ut fra konstruksjon er det klart at l ikke skjærer noen av hjørnene i $\triangle EBC$)
Vi påstår så at strålen $\overrightarrow{AD}$ ikke kan skjære $\overline{EC}$ den motsatte strålen $\overrightarrow{AF}$ kan heller ikke skjære siden $\overline{EC}$ eller siden $\overline{BC}$ i $\triangle EBC$.
. Konklusjonen på dette er da at $\overrightarrow{AD}$ må skjære $\overline{BC}$ i et punkt vi kan betegne G.

(i) $\overrightarrow{AF} \cap \overline{EC} = \emptyset$:

$F * A * D \Rightarrow F \not\sim D$ (rel $\overleftrightarrow{AB}$)

$C \sim D$ (rel $\overleftrightarrow{AB}$) (D indre punkt i $\angle BAC$)

Tilsammen : $F \not\sim C$ (rel $\overleftrightarrow{AB}$)

Z-teoremet gir da at $\overrightarrow{EC} \cap \overrightarrow{AF} = \emptyset$

Siden $\overline{EC} \subset \overrightarrow{EC}$, må også

$$\overline{EC} \cap \overrightarrow{AF} = \emptyset.$$

(ii) $\overrightarrow{AF} \cap \overline{BC} = \emptyset$:

$C \not\sim F$ (rel $\overleftrightarrow{AB}$) (Bevist ovenfor), $A \neq B$.

$\overrightarrow{BC} \cap \overrightarrow{AF} = \emptyset$ ved Z-teoremet, og siden $\overline{BC} \subseteq \overrightarrow{BC}$, får vi også:

$$\overrightarrow{AF} \cap \overline{BC} = \emptyset.$$

(iii) $\overrightarrow{AD} \cap \overline{EC} = \emptyset$.

Siden $E * A * B$, har vi $E \not\sim B$ (rel $\overleftrightarrow{AC}$)

Videre har vi at $B \sim D$ (rel $\overleftrightarrow{AC}$) siden

D er indre punkt i $\angle BAC$. Til- sammen har vi da $E \not\!\sim D$ (rel $\overleftrightarrow{AC}$)
Ved Z-teoremet får vi da at

$$\overrightarrow{CE} \cap \overrightarrow{AD} = \emptyset$$

og som før at:

$$\overrightarrow{AD} \cap \overline{CE} = \emptyset.$$

TEOREM 3.5.3:

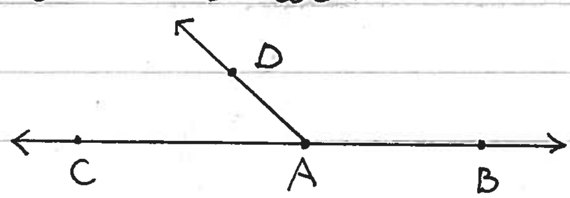
Et punkt D er et indre punkt i $\angle BAC$ hvis og bare hvis strålen $\overrightarrow{AD}$ skjærer et indre punkt av segmentet $\overline{BC}$.

BEVIS:

"Hvis": Antar vi at $\overrightarrow{AD}$ skjærer et indre punkt av $\overline{BC}$ følger det fra Teorem 3.3.10 at $\overrightarrow{AD}$ er en stråle mellem $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$. D.v.s. at D er et indre punkt i $\angle BAC$.
"Bare hvis" følger av Crossbar-teoremet. □

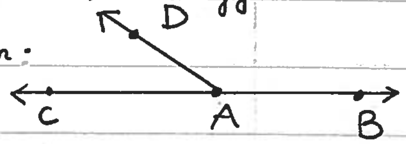
DEFINISJON 3.5.4:

To vinkler $\angle BAD$ og $\angle DAC$ danner et lineært par dersom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ er motsatte stråler.



TEOREM 3.5.5 (Lineært-par-teoremet)

Hvis vinklene $\angle BAD$ og $\angle DAC$) utgjør et lineært par, så gjelder:



$$\mu(\angle BAD) + \mu(\angle DAC) = 180°$$

DEFINISJON 3.5.6:

To vinkler $\angle BAC$ og $\angle EDF$ sies å være suplementærvinkler dersom:

$$\mu(\angle BAC) + \mu(\angle EDF) = 180°.$$

MERKNAD:

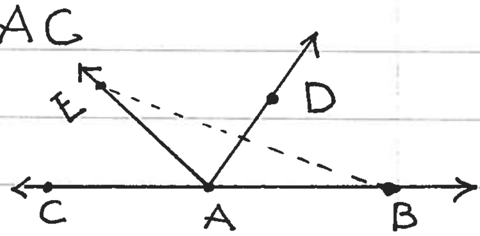
Teorem 3.5.5 sier m.a.o at et lineært par vil være supplementar-vinkler

For å bevise Teorem 3.5.5 trenger vi:

LEMMA 3.5.7:

Hvis $C * A * B$ og D er et indre punkt i $\angle BAE$, så er E et indre punkt i $\angle DAC$

BEVIS:



Siden D er et indre punkt i $\angle BAE$, vet vi at $D \sim E$ (rel $\overleftrightarrow{AB}$). Vi trenger da bare å bevise at $E \sim C$ (rel $\overleftrightarrow{AD}$). Ut fra Crossbar-teoremet må da $\overline{EB} \cap \overrightarrow{AD} \neq \emptyset$. og dermed må $\overline{EB} \cap \overleftrightarrow{AD} \neq \emptyset$. Altså har vi at

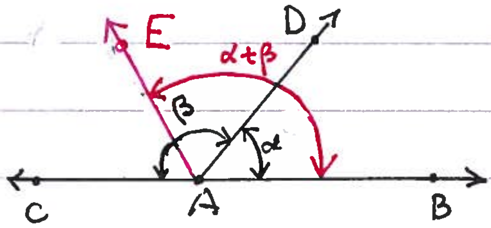
$$E \nsim B \ (\text{rel } \overleftrightarrow{AD})$$

Siden $C * A * B$, vil også

$$B \nsim C \ (\text{rel } \overleftrightarrow{AD}).$$

Altså vil $E \sim C$ (rel $\overleftrightarrow{AD}$). $\square$

BEVIS FOR TEOREM 3.5.5:



Vi innförer betegnelsene:

$$\alpha = \mu(\angle BAD),$$
$$\beta = \mu(\angle DAC).$$

Vi skal altså bevise at $\alpha+\beta = 180^\circ$
Vi beviser da at begge alternativene:

$$\alpha+\beta < 180 \quad \text{og} \quad \alpha+\beta > 180$$

gir selvmotsigelser.

(i) $\alpha+\beta < 180^\circ$

Ut fra Transportøraksiomet, del 3, vil det finnes et punkt E s.a.

$$E \sim D \ (\text{rel } \overleftrightarrow{AB})$$

s.a. $\mu(\angle BAE) = \alpha+\beta$. Vi påstår da at D er et indre punkt i $\angle BAE$. I följe Teorem 3.4.5 og det faktum at $\alpha < \alpha+\beta$, må $\overrightarrow{AD}$ være en stråle mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AE}$. Dette gir videre:

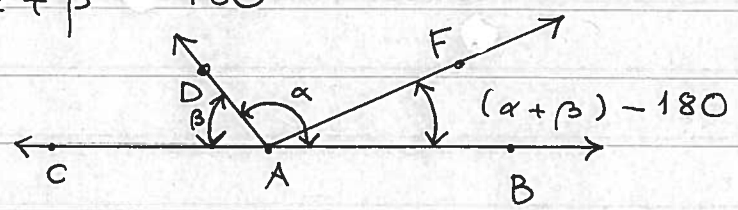
$$\mu(\angle BAE) = \mu(\angle BAD) + \mu(\angle DAE)$$
$$= \alpha+\beta.$$

Altså: $\mu(\angle DAE) = \beta$. Videre har vi at E er indre punkt i $\angle DAC$ (v. Lemma 3.5.7). Dermed har vi:

$$\mu(\angle DAE) + \mu(\angle EAC) = \mu(\angle DAC)$$
$$\beta \quad + \quad \mu(\angle EAC) = \beta$$

M.a.o. må $\mu(\angle EAC) = 0$. Men dette er i strid med Transportøraksiomet, 1, 2.

(ii) $\alpha + \beta \quad 180$



Vi har altså at $180 - (\alpha + \beta) > 0$
Vi kan da velge et punkt F s.a $F \sim D$ (rel $\overleftrightarrow{AB}$) s.a. $\mu(\angle BAF) = (\alpha + \beta) - 180$ ut fra Transportør-aksiomet. Siden $\beta < 180$, vil $(\alpha + \beta) - 180 < \alpha$. Altså er F et indre punkt i $\angle BAD$. Vi har som før:

$$\mu(\angle BAF) + \mu(\angle FAD) = \mu(\angle BAD)$$

som gir:

$$\mu(\angle FAD) = \alpha - (\alpha + \beta - 180) = 180 - \beta$$

Ved Lemma 3.5.7 er D et indre punkt i $\angle FAC$. Dette gir:

$$\mu(\angle FAD) + \mu(\angle DAC) = \mu(\angle FAC)$$
$$(180 - \beta) + \beta = \mu(\angle FAC)$$

Altså $\mu(\angle FAC) = 180$. Dette er i strid med Transportør-aksiomet; del 1.

KONKLUSJON:

$$\alpha + \beta = 180. \qquad \square$$

DEFINISJON 3.5.8

To linjer l og m sies å stå *perpendikulært (vinkelrett)* på hverandre, dersom $A \in l \cap m$ og det eksisterer punkt $B \in l$ og $C \in m$ s.a $\angle BAC$ er en rett vinkel. Notasjon: $l \perp m$.

TEOREM 3.5.9

Hvis l er en linje og P et punkt på l, finnes det eksakt en linje m s.a. $P \in m$ og $m \perp l$.

BEVIS: Øving 6

DEFINISJON 3.5.10

Hvis $D \neq E$ forstår vi ved midtnormalen på $\overline{DE}$ en linje m s.a. midtpunktet av $\overline{DE}$ ligger på m og $m \perp \overleftrightarrow{DE}$.

TEOREM 3.5.11 (Eksistens og entydighet av midtnormal.)

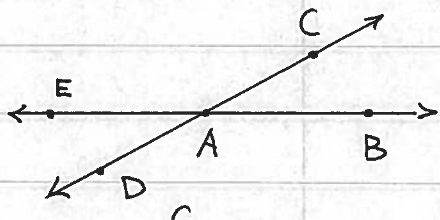
Hvis $D \neq E$ finnes det eksakt en midtnormal på $\overline{DE}$

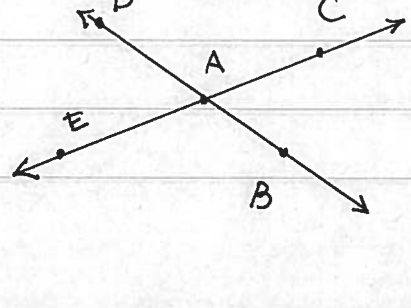
BEVIS: Øving 6

DEFINISJON 3.5.12

Vinklene $\angle BAC$ og $\angle DAE$ utgjör et vertikalt par (er vertikale vinkler) dersom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AE}$ er motsatte stråler og $\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AD}$ er motsatte stråler

eller dersom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AD}$ er motsatte stråler og $\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{AE}$ er motsatte stråler.





PÅ NORSK kalles et slikt par toppvinkler.